

ШИФР

1402

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике Дата проведения 19.07.2025
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника ВЕСЕЛОВ АНДРЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧСерия и номер паспорта

2	2	2	7
---	---	---	---

3	2	4	7	2	5
---	---	---	---	---	---

СНИЛС 746-830-75884Дата рождения 11.07.2007Класс 77Школа № 77 район _____ город Саров**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;

- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды

шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (другие записи на папке делать запрещено).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

Веселов

(подпись участника олимпиады)

ШИФР

1102

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
20	20	10	№4 нет / №5 нет	50

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

№7. +

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 7;$$

$$2 \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x - 7 = 0;$$

$$2 \cdot (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x - 7 = 0;$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 7 = 0; \text{ пусть } \sin x = t, \text{ где } -1 \leq t \leq 1;$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 7 = 0;$$

$$t^3(2t - 1) - (4t^2 - 7) = 0; t^3(2t - 1) - (2t - 1)(2t + 7) = 0;$$

$$(2t - 1)(t^3 - 2t + 7) = 0; (2t - 1)(t^3 - t - t + 7) = 0;$$

$$(2t - 1)(t(t^2 - 1) - (t - 7)) = 0; (2t - 1)(t(t - 1)(t + 1) - (t - 7)) = 0;$$

$$(2t - 1)(t - 1)(t^2 + t - 7) = 0;$$

$$\begin{cases} 2t - 1 = 0 \\ t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 7 = 0 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t^2 + t - 7 = 0 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$t^2 + t - 7 = 0, D = 7 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

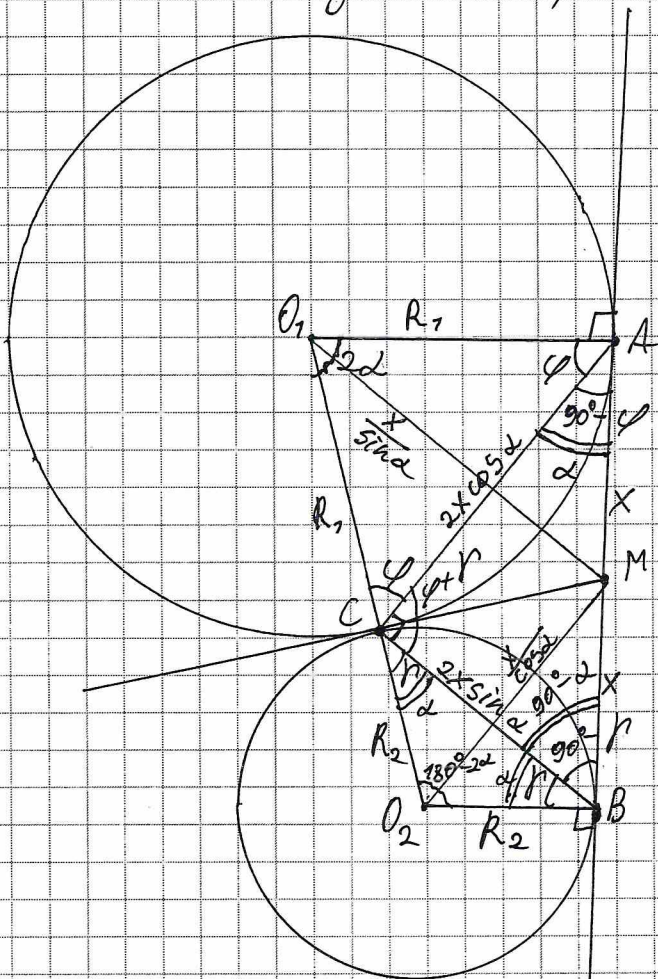
тогда: $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5}}{6} + 2\sqrt{5}n$, или $x = \frac{5\sqrt{5}}{6} + 2\sqrt{5}n$, или
 $x = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}n$, или $x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\sqrt{5}n$, или
 $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\sqrt{5}n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Дано: $\triangle ABC$ — n/y , $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle \alpha$, $O_1(R_1)$ и $O_2(R_2)$ проходят через A, C и B, C и касаются AB . Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение: докажем, что если окружности O_1 и O_2 касаются друг друга в точке C и прямой AB в A и B , то $\triangle ABC$ — n/y .



$AO_1 \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ (радиусы, пров. в точку кас-я перпендикулярны касательной); пусть $\angle O_2BC = \gamma$, а $\angle O_1AC = \varphi$, тогда $\angle O_2CB = \gamma$ и $\angle O_1CA = \varphi$ ($\triangle O_1AC$ и $\triangle O_2BC$ n/y ($O_1C = O_1A = R_1$, $O_2C = O_2B = R_2$)); $\angle CBA = 90^\circ - \gamma$, $\angle CAB =$

$= 90^\circ - \varphi$; $\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ + \varphi - 90^\circ + \gamma = \varphi + \gamma$; $\angle O_1CO_2 = \varphi + \gamma + \varphi + \gamma = 2\varphi + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \varphi + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$; т.е. тогда $\triangle ABC$ — n/y ; пусть $AM = x = BM$, тогда: $AC = 2x \cos \alpha$, а $BC = 2x \sin \alpha$;

$\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, тогда $\angle O_2BC = \angle O_2CB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$;
 $\angle CO_2B = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle AO_1O_2 \neq \angle BO_2O_1 = 180^\circ$ (одно-

сторону же при AO_1 и BO_2 и окружён O_1O_2 ,
 тогда $\angle AO_1O_2 = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$;

но т. $\cos \theta$ в $\triangle AO_1C$ и $\triangle BO_2C$:

$$4X^2 \cos^2 \alpha = 2R_1^2 - 2R_1^2 \cos 2\alpha = 2R_1^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$4X^2 \sin^2 \alpha = 2R_2^2 - 2R_2^2 \cos(180^\circ - 2\alpha) = 2R_2^2 (1 + \cos 2\alpha)$$

$$R_1^2 = \frac{2X^2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{2X^2 \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha} = X^2 \cot^2 \alpha \quad R_1 = X \cot \alpha$$

$$R_2^2 = \frac{2X^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2X^2 \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha} = X^2 \tan^2 \alpha \quad R_2 = X \tan \alpha$$

Из $n/g \triangle AO_1M$ и $n/g \triangle O_2BM$ по т. Пифагора:

$$O_1M^2 = X^2 + X^2 \cot^2 \alpha = X^2 (1 + \cot^2 \alpha) = \frac{X^2}{\sin^2 \alpha}$$

$$O_2M^2 = X^2 + X^2 \tan^2 \alpha = X^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{X^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$O_1M = \frac{X}{\sin \alpha}, \quad O_2M = \frac{X}{\cos \alpha}$$

$$O_1M^2 + O_2M^2 = \frac{X^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{X^2}{\cos^2 \alpha} \quad \text{или}$$

$$O_1O_2^2 = (X \cot \alpha + X \tan \alpha)^2 = X^2 \cot^2 \alpha + X^2 \tan^2 \alpha + 2X^2 \cot \alpha \tan \alpha =$$

$$= X^2 \cot^2 \alpha + X^2 \tan^2 \alpha + 2X^2$$

$$O_1M^2 + O_2M^2 = X^2 + X^2 \cot^2 \alpha + X^2 + X^2 \tan^2 \alpha = 2X^2 + X^2 \cot^2 \alpha + X^2 \tan^2 \alpha =$$

$$= O_1O_2^2 \Rightarrow \triangle O_1O_2M - n/g$$

$$S_{O_1O_2M} = \frac{O_1M \cdot O_2M}{2} = \frac{X}{\sin \alpha} \cdot \frac{X}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{X^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$S_{ABC} = \frac{2X \cos \alpha - 2X \sin \alpha}{2} = X^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2M}} = \frac{X^2 \sin 2\alpha}{\frac{X^2}{\sin 2\alpha}} = \sin^2 2\alpha$$

или $\sin^2 2\alpha$.

д3. ±

$$ax^4 + bx = c$$

$y = ax^4$ - возрастает на $[0; +\infty)$, уб-ет на $(-\infty; 0]$,

$y = bx$ - возр-ет \Rightarrow

$y = ax^4 + bx$ возр-ет на $[0; +\infty)$, уб-ет на $(-\infty; 0] \Rightarrow$

пересекает прямую $y = c$ 2 раза в I (один

раз в I-й четверти, а другим раз во II-й),

т.к. $c > 0$ (c - стор. Δ) \Rightarrow один корень ур-я

положит., а другой отриц., т.т.г.

